On well-posedness in Gevrey classes of the Cauchy problem for hyperbolic operators of second order (examples)
2階双曲型作用素に対する Cauchy 問題の Gevrey 族における適切性について (例)

Seiichiro Wakabayashi
若林 誠一郎

1. 主定理

$P(t,\tau,\xi) = \tau^2 - a(t,\xi) + b(t,\tau,\xi) + c(t) \quad ((t,\xi) \in [0,\infty) \times \mathbf{R}^n),$

$a(t,\xi)$: ξ の 2 次斉次式, $a(t,\xi) \geq 0 \quad ((t,\xi) \in [0,\infty) \times \mathbf{R}^n),$

簡単のため係数は t の 実解析函数と仮定する.

$b(t,\tau,\xi) = b_0(t)\tau + b_1(t,\xi),$

$b_1(t,\xi)$: ξ の 1 次斉次式

$\kappa \geq 1$ とし

$$
\begin{aligned}
& f(t,x) \in \mathcal{E}^{(\kappa)}([0,\infty) \times \mathbf{R}^n) \text{ (resp. } \mathcal{E}^{\{\kappa\}}([0,\infty) \times \mathbf{R}^n))\\
& \quad \overset{def}{\Longleftrightarrow}\\
& \forall T > 0,\ \forall h > 0,\ \exists C \equiv C_{T,h} > 0\\
& (\text{resp. } \forall T > 0,\ \exists h > 0,\ \exists C \equiv C_T > 0) \quad \text{s..t.}\\
& \quad |\partial_t^j \partial_x^\alpha f(t,x)| \leq C h^{j+|\alpha|} (j+|\alpha|)!^\kappa\\
& \qquad \text{for } (t,x) \in [0,T] \times \mathbf{R}^n \text{ with } |x| \leq T
\end{aligned}
$$

注）$\mathcal{E}^{(\kappa)}([0,\infty))$, $\mathcal{E}^{(\kappa)}(\mathbf{R}^n)$, $\mathcal{E}^{\{\kappa\}}([0,\infty))$, $\mathcal{E}^{\{\kappa\}}(\mathbf{R}^n)$ 等も同様に定義.

仮定

(A) $b(t,\tau,\xi)$ の係数及び $c(t)$ は $\mathcal{E}^*([0,\infty))$ に属する.

ここで $* = (\kappa)$ or $\{\kappa\}$ を表すとする.

Cauchy 問題

$$\text{(CP)} \qquad \begin{cases} P(t,D_t,D_x)u(t,x) = f(t,x) \quad ((t,x) \in [0,\infty) \times \mathbf{R}^n), \\ u(0,x) = u_0(x), \quad (D_t u)(0,x) = u_1(x) \quad (x \in \mathbf{R}^n) \end{cases}$$

を $\mathcal{E}^*([0,\infty) \times \mathbf{R}^n)$ で考える. ここで

$$f(t,x) \in \mathcal{E}^*([0,\infty) \times \mathbf{R}^n), \quad u_0(x), u_1(x) \in \mathcal{E}^*(\mathbf{R}^n)$$

注）(i) $g(x) \in \mathcal{D}^{(\kappa)}(\mathbf{R}^n) \equiv \mathcal{E}^{(\kappa)}(\mathbf{R}^n) \cap C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ のとき
$\forall A > 0$, $\exists C_A > 0$ s.t.

$$|\hat{g}(\xi)| \le C_A \exp[-A|\xi|^{1/\kappa}] \quad \text{for } \xi \in \mathbf{R}^n$$

ここで

$$\hat{g}(\xi) = \int_{\mathbf{R}^n} g(x) e^{-ix\cdot\xi}\, dx : \quad \text{Fourier 変換}$$

(ii) $g(x) \in \mathcal{D}^{\{\kappa\}}(\mathbf{R}^n) \equiv \mathcal{E}^{\{\kappa\}}(\mathbf{R}^n) \cap C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ のとき
$\exists A > 0$, $\exists C > 0$ s.t.

$$|\hat{g}(\xi)| \le C \exp[-A|\xi|^{1/\kappa}] \quad \text{for } \xi \in \mathbf{R}^n$$

Prop. $\kappa \le 2$ (resp. $\kappa < 2$) のとき, (CP) は $\mathcal{E}^{(\kappa)}$ で (resp. $\mathcal{E}^{\{\kappa\}}$) で適切.

主定理を述べるために, 次の性質を持つ $\mathcal{R}(\xi) : S^{n-1} \ni \xi \mapsto \mathcal{R}(\xi) \in \mathcal{P}(\mathbf{C})$ が与えられているとする:

$$\forall T > 0, \ \exists N_T \in \mathbf{Z}_+ \ s.t. \ \#\{\lambda \in \mathcal{R}(\xi);\ \mathrm{Re}\,\lambda \le T\} \le N_T \quad \text{for } \xi \in S^{n-1}$$

注）$\mathcal{R}(\xi)$ は 通常 $a(\lambda,\xi)$ の λ についての零点の集合にとる (必要なら適当に修正).

主定理 $0 \le \exists \nu < 1/\kappa$ s.t. 「$\forall T > 0, \exists C_T > 0$ s.t.

$$\text{(G)} \qquad \left(\min_{s\in\mathcal{R}(\xi)} |t-s|\right)^{1/(1-\nu)} |b_1(t,\xi)| \le C_T\, a(t,\xi)^{(1-2\nu)/(2-2\nu)}$$

for $(t,\xi) \in [0,T] \times S^{n-1}$」

が成り立てば, (CP) は $\mathcal{E}^*$ で適切.

注）(i) $\nu = 0$ ととれば, (CP) は C^∞ well-posed ($b(t,\tau,\xi)$ の係数, $c(t)$ は $C^\infty([0,\infty))$ に属すると仮定).
(ii) 主定理の結果は $\mathcal{E}^{(\kappa)}$ と $\mathcal{E}^{\{\kappa\}}$ で差がない (Prop. 参).
(iii) Prop. より $\kappa \geq 2$ のときを考えれば良い. そのとき $0 \leq \nu < 1/2$ として (G) を考える.

2.　主定理等の略証

$T > 0$: fixed
$\Lambda(t,\xi)$: $\exists C_T > 0$ s.t.

$$
\begin{aligned}
&|\Lambda(t,\xi)| \leq C_T\langle\xi\rangle^{1/\kappa} \quad \text{for } (t,\xi) \in [0,T] \times \mathbf{R}^n \text{ if } * = (\kappa),\\
&|\Lambda(t,\xi)| \leq C_T\langle\xi\rangle^{\nu} \quad \text{for } (t,\xi) \in [0,T] \times \mathbf{R}^n \text{ if } * = \{\kappa\}
\end{aligned}
$$

ここで $\nu < 1/\kappa$: 1つ固定

(CP) を $\mathcal{E}^{(\kappa)}$ で考える
$\longleftrightarrow$
$\forall A > 0$ ($\gamma > 0$ は適当に固定 ← エネルギー評価を得るため)

$$
(\mathrm{CP})_A \quad
\begin{cases}
(\exp[A\langle D_x\rangle^{1/\kappa} - \gamma\Lambda(t,D_x)]P(t,D_t,D_x) \\
\qquad \times \exp[-A\langle D_x\rangle^{1/\kappa} + \gamma\Lambda(t,D_x)])v(t,x) \\
\quad = \exp[A\langle D_x\rangle^{1/\kappa} - \gamma\Lambda(t,D_x)]f(t,x), \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (t,x) \in [0,T] \times \mathbf{R}^n, \\
v(0,x) = \exp[A\langle D_x\rangle^{1/\kappa} - \gamma\Lambda(0,D_x)]u_0(x), \quad x \in \mathbf{R}^n \\
(D_t v)(0,x) = \exp[A\langle D_x\rangle^{1/\kappa} - \gamma\Lambda(0,D_x)]u_1(x), \quad x \in \mathbf{R}^n
\end{cases}
$$

($f(t,x) \in C^\infty([0,T];\mathcal{D}^{(\kappa)}(\mathbf{R}^n)$, $u_k(x) \in \mathcal{D}^{(\kappa)}(\mathbf{R}^n)$ $(k=1,2)$ としてエネルーギー不等式を導く)
$+\ \alpha$

$(\mathrm{CP})_A$ を満たす $v(t,x)$ が求まれば,

$$u(t,x) = \exp[-A\langle D_x\rangle^{1/\kappa} + \gamma\Lambda(t,D_x)]v(t,x)$$

は (CP) を満たす.

$\mathcal{E}^{(\kappa)}$ 適切性を示すために, 有限伝播性を導く. そのために $\varepsilon \in (0,1]$ として, $P(t,\tau,\xi)$ を

$$P_\varepsilon(t,\tau,\xi) = \tau^2 - a(t,\xi) - \varepsilon|\xi|^2 + b(t,\tau,\xi) + c(t)$$

で置き換える (少し議論が必要). 故に

$$(\mathrm{CP})_{\varepsilon,A} \quad \begin{cases} (\exp[A\langle D_x\rangle^{1/\kappa} - \gamma\Lambda(t,D_x)]P_\varepsilon(t,D_t,D_x) \\ \qquad \times \exp[-A\langle D_x\rangle^{1/\kappa} + \gamma\Lambda(t,D_x)])v_\varepsilon(t,x) \\ \quad = \exp[A\langle D_x\rangle^{1/\kappa} - \gamma\Lambda(t,D_x)]f(t,x), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (t,x) \in [0,T] \times \mathbf{R}^n, \\ v_\varepsilon(0,x) = \exp[A\langle D_x\rangle^{1/\kappa} - \gamma\Lambda(0,D_x)]u_0(x), \quad x \in \mathbf{R}^n \\ (D_t v_\varepsilon)(0,x) = \exp[A\langle D_x\rangle^{1/\kappa} - \gamma\Lambda(0,D_x)]u_1(x), \quad x \in \mathbf{R}^n \end{cases}$$

をまず考える. $A > 0$ は

$$(1) \qquad \begin{cases} \exp[2A\langle D_x\rangle^{1/\kappa}]f(t,x) \in C^\infty([0,T];H^\infty(\mathbf{R}^n)), \\ \exp[2A\langle D_x\rangle^{1/\kappa}]u_k(x) \in H^\infty(\mathbf{R}^n) \quad (k=0,1) \end{cases}$$

を満たすように選ぶ.

また同様に

(CP) を $\mathcal{E}^{\{\kappa\}}$ で考える
$\longleftrightarrow$
$A > 0$ を (1) を満たすように選び $(\mathrm{CP})_{\varepsilon,A}$ を Sobolev 空間で考える
$+\ \alpha$

Prop. を示すためには

$$\Lambda(t,\xi) = t\langle\xi\rangle^{1/2}$$

ととる. 主定理の略証を与えよう.

$$\begin{aligned} \Lambda(t,\xi) =& t\langle\xi\rangle^\nu + \sum_{s\in\mathcal{R}(\xi/|\xi|)} \langle\xi\rangle^\nu \log\Big(\sqrt{(t-s)^2\langle\xi\rangle+1} + (t-s)\langle\xi\rangle^{1/2}\Big) \\ &+ \langle\xi\rangle^\nu \log\Big(\sqrt{t^2\langle\xi\rangle^{4/3}+1} + t\langle\xi\rangle^{2/3}\Big) \end{aligned}$$

ととる.

$$
\begin{aligned}
W(t,\xi) &:= \partial_t\Lambda(t,\xi)\\
&= \langle\xi\rangle^{\nu} + \sum_{s\in\mathcal{R}(\xi/|\xi|)} \langle\xi\rangle^{\nu+1/2}/\sqrt{(t-s)^2\langle\xi\rangle+1} + \langle\xi\rangle^{\nu+2/3}/\sqrt{t^2\langle\xi\rangle^{4/3}+1}
\end{aligned}
$$

とおく. $\varepsilon\in(0,1]$, $\gamma>0$ とし

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}_\varepsilon(t,\xi;w;\gamma) = &\exp[-\gamma\Lambda(t,\xi)]\\
&\times\{|\partial_t w(t,\xi)|^2 + (a(t,\xi)+\varepsilon|\xi|^2+W(t,\xi)^2)|w(t,\xi)|^2\}
\end{aligned}
$$

とおいて

[W] W., On the Cauchy problem for hyperbolic operators of second order whose coefficients depend only on the time variable, J. Math. Soc. Japan 62-1 (2010), 95–133

の §3 の議論を適用する.

$$
\begin{aligned}
&\partial_t\mathcal{E}_\varepsilon(t,\xi;w_\varepsilon;\gamma)\\
&\le [|\hat{g}(t,\xi)|^2/W(t,\xi)\\
&\quad -\{\gamma-3-(|c(t)|+2\operatorname{Im} b_0(t))/W(t,\xi)\}W(t,\xi)|\partial_t w_\varepsilon(t,\xi)|^2\\
&\quad -\{\gamma a(t,\xi)W(t,\xi)^2+(\gamma-3)W(t,\xi)^4-|b_1(t,\xi)|^2\\
&\qquad -|c(t)|W(t,\xi)-\partial_t a(t,\xi)\cdot W(t,\xi)\}|w_\varepsilon(t,\xi)|^2/W(t,\xi)]\\
&\quad \times\exp[-\gamma\Lambda(t,\xi)]
\end{aligned}
$$

ここで

$$
\begin{aligned}
&\hat{g}(t,\xi)=\exp[A\langle\xi\rangle^{1/\kappa}-\gamma\Lambda(t,\xi)]\hat{f}(t,\xi),\\
&w_k(\xi)=\exp[A\langle\xi\rangle^{1/\kappa}-\gamma\Lambda(0,\xi)]\hat{u}_k(\xi)\quad (k=0,1)
\end{aligned}
$$

$$
\exp[3A\langle\xi\rangle^{1/\kappa}/4]\hat{g}(t,\xi)\in C^\infty([0,T];L^2(\mathbf{R}^n)), \tag{2}
$$

$$
\exp[3A\langle\xi\rangle^{1/\kappa}/4]w_k(\xi)\in L^2(\mathbf{R}^n)\quad (k=0,1), \tag{3}
$$

$$
\begin{cases}
(\exp[-\gamma\Lambda(t,\xi)]P_\varepsilon(t,D_t,\xi)\exp[\gamma\Lambda(t,\xi)])w_\varepsilon(t,\xi)=\hat{g}(t,\xi),\\
w_\varepsilon(0,\xi)=w_0(\xi),\quad (\partial_t w_\varepsilon)(0,\xi)=w_1(\xi)
\end{cases}
$$

常微分方程式の解の一意存在定理より $w_\varepsilon(t,\xi)$ の存在は明らか.

$T>0$ を固定して, $\gamma>0$ を

$$
\gamma-3-|c(t)|-2\operatorname{Im} b_0(t)\ge 0\quad (t\in[0,T])
$$

を満たすようにとる.

$$\text{(4)}\qquad \partial_t a(t,\xi)\cdot W(t,\xi) \lesssim a(t,\xi)W(t,\xi)^2 + W(t,\xi)^4 \qquad ((t,\xi)\in[0,T]\times\mathbf{R}^n),$$

$$\text{(5)}\qquad |b_1(t,\xi)|^2 \lesssim a(t,\xi)W(t,\xi)^2 + W(t,\xi)^4 \qquad ((t,\xi)\in[0,T]\times\mathbf{R}^n)$$

を示せば, γ を十分大にとって

$$\partial_t \mathcal{E}_\varepsilon(t,\xi;w_\varepsilon;\gamma) \le \exp[-\gamma\Lambda(t,\xi)]|\hat{g}(t,\xi)|^2/W(t,\xi)$$

よって

$$\text{(6)}\qquad \mathcal{E}_\varepsilon(t,\xi;w_\varepsilon;\gamma) \le \mathcal{E}_\varepsilon(0,\xi;w_\varepsilon;\gamma) + \int_0^t \exp[-\gamma\Lambda(s,\xi)]|\hat{g}(s,\xi)|^2/W(s,\xi)\,ds$$

$\longrightarrow$ 主定理 (エネルギー評価から主定理を示すためにはいくつかのステップが必要)

(4) は [W] で $\nu=0$ の場合に示した. 但し, 必要なら $\mathcal{R}(\xi)$ を修正する. (5) が成り立つことを示そう. $(t,\xi)\in[0,T]\times\mathbf{R}^n$ を固定.

(I) $\exists s\in\mathcal{R}(\xi/|\xi|)$ s.t. $|t-s|\langle\xi\rangle^{1/2}\le 1$ のとき $W(t,\xi)\ge\langle\xi\rangle^{\nu+1/2}/\sqrt{2}$ より (5) が成立.

(II) $|t-s|\langle\xi\rangle^{1/2}\ge 1$ for $\forall s\in\mathcal{R}(\xi/|\xi|)$ のとき

$$W(t,\xi)\ge\frac{1}{\sqrt{2}}\langle\xi\rangle^{\nu}\Big(\min_{s\in\mathcal{R}(\xi/|\xi|)}|t-s|\Big)^{-1}$$

$0\le X\le 1$ として

$$\text{(7)}\qquad |b_1(t,\xi)| \lesssim \Big\{|\xi|^{\nu}\Big(\min_{s\in\mathcal{R}(\xi/|\xi|)}|t-s|\Big)^{-1}\sqrt{a(t,\xi)}\Big\}^X \times\Big\{|\xi|^{\nu}\Big(\min_{s\in\mathcal{R}(\xi/|\xi|)}|t-s|\Big)^{-1}\Big\}^{2(1-X)}$$

を示せば, (5) が成立することが分かる. ξ についての斉次性より

$$1=(\nu+1)X+2(1-X)\nu \qquad \therefore X=\frac{1-2\nu}{1-\nu}$$

(7) で $X=\dfrac{1-2\nu}{1-\nu}$ とおいた条件が (G). よって (G) が満たされれば, (6) が成り立つ.
$\gamma>0$ は固定 (エネルギ不等式導出時に十分大にとった). ν' を $\nu<\nu'<1/\kappa$ を満たすようにとって

$$|\Lambda(t,\xi)|\le C_0\langle\xi\rangle^{\nu'}\quad\text{for }(t,\xi)\in[0,T]\times\mathbf{R}^n$$

故に $\widehat{C}>0$ を適当にとって

$$\begin{aligned}&\exp[-\widehat{C}\langle\xi\rangle^{\nu'}]\{|w(t,\xi)|^2+|\partial_t w(t,\xi)|^2\}\le\mathcal{E}_\varepsilon(t,\xi;w;\gamma)\\&\le\exp[\widehat{C}\langle\xi\rangle^{\nu'}]\{|w(t,\xi)|^2+|\partial_t w(t,\xi)|^2\}\quad((t,\xi)\in[0,T]\times\mathbf{R}^n\in[0,T])\end{aligned}$$

(6) より

$$\begin{aligned}(8)\quad&|w_\varepsilon(t,\xi)|^2+|\partial_t w_\varepsilon(t,\xi)|^2\\&\le\exp[2\widehat{C}\langle\xi\rangle^{\nu'}]\{|w_0(\xi)|^2+|w_1(\xi)|^2\}+\int_0^t\exp[2\widehat{C}\langle\xi\rangle^{\nu'}]|\hat{g}(s,\xi)|^2\,ds\\&\qquad\qquad\text{for }(t,\xi)\in[0,T]\times\mathbf{R}^n\end{aligned}$$

故に (2), (3) より $w_\varepsilon(t,\xi)\in C^\infty([0,T];L^2(\mathbf{R}^n))$ が分かり, $w_\varepsilon(t,\xi)$ は ξ に関して逆 Fourier 変換できる.

$$u_\varepsilon(t,x)=\exp[-A\langle D_x\rangle^{1/\kappa}+\gamma\Lambda(t,D_x)]\mathcal{F}_\xi^{-1}[w_\varepsilon(t,\xi)](x)$$

$((t,x)\in[0,T]\times\mathbf{R}^n)$ とおけば, $u_\varepsilon(t,x)$ は

$$\begin{cases}P_\varepsilon(t,D_t,D_x)u_\varepsilon(t,x)=f(t,x),\quad(t,x)\in[0,T]\times\mathbf{R}^n,\\u_\varepsilon(0,x)=u_1(x),\quad(\partial_t u_\varepsilon)(0,x)=u_1(x),\quad x\in\mathbf{R}^n,\end{cases}$$

$$\begin{aligned}&|\hat{u}_\varepsilon(t,\xi)|^2+|\partial_t\hat{u}_\varepsilon(t,\xi)|^2\\&\le C\exp[-A\langle\xi\rangle^{1/\kappa}/2]\Big[\sum_{k=0}^{1}|\exp[2A\langle\xi\rangle^{1/\kappa}]\hat{u}_k(\xi)|^2\\&\qquad+\int_0^t|\exp[2A\langle\xi\rangle^{1/\kappa}]\hat{f}(s,\xi)|^2\,ds\Big]\quad((t,\xi)\in[0,T]\times\mathbf{R}^n)\end{aligned}$$

を満たす. $P_\varepsilon(t,\tau,\xi)$ $(\varepsilon>0)$ は strictly hyperbolic. 故に $\operatorname{supp}u_\varepsilon$ の評価ができ, $\varepsilon\downarrow 0$ のとき $u_\varepsilon(t,x)\to u(t,x)$ in $\mathcal{D}'((0,T)\times\mathbf{R}^n)$ より $\operatorname{supp}u$ も評価でき, $u_0(x)$, $u_1(x)$, $f(t,x)$ は x について compact support をも

たなくても, [W] の議論を適用して解 $u(t,x)$ を構成できる. $u(t,x) \in C^\infty([0,T];\mathcal{E}^*(\mathbf{R}^n))$ は明らか. $u(t,x) \in \mathcal{E}^*([0,T]\times\mathbf{R}^n)$ を示そう. 方程式より

$$D_t^2\hat{u}(t,\xi) = \tilde{a}(t,\xi)\hat{u}(t,\xi) - b_0(t)D_t\hat{u}(t,\xi)$$

である. ここで $\tilde{a}(t,\xi) = a(t,\xi) - b_1(t,\xi) - c(t)$. $B>0$ を任意に与えて, 帰納法を用いて

$$(9)\quad |D_t^k\hat{u}(t,\xi)| \le C(u)A(u)^k k!^\kappa \sum_{l=0}^{k} \frac{\langle\xi\rangle^l}{l!^\kappa} B^l \exp[-A\langle\xi\rangle^{1/\kappa}/2] \quad (k\ge 0)$$

が成り立つことを示そう.

$$\begin{aligned}
&|D_t^k\tilde{a}(t,\xi)| \le C(\tilde{a})A(\tilde{a})^k k!^\kappa \langle\xi\rangle^2,\\
&|D_t^k b_0(t)| \le C(b_0)A(b_0)^k k!^\kappa
\end{aligned}$$

とする. そのとき (9) で $A(u)>0$ を

$$A(u) \ge A(b_0),\quad A(u) \ge \sqrt{2c_\kappa C(\tilde{a})}/B,\quad A(u) \ge 2c_\kappa C(b_0)/B$$

を満たすように選ぶ. ここで $c_\kappa > 0$ は

$$\sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l}^{1-\kappa} \le c_\kappa \quad (k\in\mathbf{Z}_+)$$

を満たす定数. (9) は $k=0,1$ に対して成立するとしてよい. $k\ge 0$ とする.

$$\begin{aligned}
&|D_t^{k+2}\hat{u}(t,\xi)|\\
&\le \sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}|D_t^{k-l}\tilde{a}(t,\xi)\cdot D_t^l\hat{u}(t,\xi)| + \sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}|D_t^{k-l}b_0(t)\cdot D_t^{l+1}\hat{u}(t,\xi)|\\
&\le \sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}C(\tilde{a})A(\tilde{a})^{k-l}(k-l)!^\kappa\langle\xi\rangle^2\cdot C(u)A(u)^l l!^\kappa\\
&\qquad\times\sum_{\mu=0}^{l}\frac{\langle\xi\rangle^\mu}{\mu!^\kappa}B^\mu\exp[-A\langle\xi\rangle^{1/\kappa}/2]\\
&\quad+\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}C(b_0)A(b_0)^{k-l}(k-l)!^\kappa\langle\xi\rangle\cdot C(u)A(u)^{l+1}(l+1)!^\kappa
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\qquad \times \sum_{\mu=0}^{l+1} \frac{\langle\xi\rangle^{\mu}}{\mu!^{\kappa}} B^{\mu} \exp[-A\langle\xi\rangle^{1/\kappa}/2] \\
&\le C(u)A(u)^{k+2}(k+2)!^{\kappa}\Big[\frac{C(\tilde a)}{A(u)^2}\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}^{1-\kappa}\frac{1}{(k+2)^{\kappa}(k+1)^{\kappa}} \\
&\qquad \times \Big(\frac{A(\tilde a)}{A(u)}\Big)^{k-l}\sum_{\mu=0}^{l}\frac{\langle\xi\rangle^{\mu+2}}{\mu!^{\kappa}}B^{\mu} \\
&\quad + \frac{C(b_0)}{A(u)}\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}^{1-\kappa}\Big(\frac{l+1}{(k+2)(k+1)}\Big)^{\kappa} \\
&\qquad \times \Big(\frac{A(b_0)}{A(u)}\Big)^{k-l}\sum_{\mu=0}^{l+1}\frac{\langle\xi\rangle^{\mu+1}}{\mu!^{\kappa}}B^{\mu}\Big] \exp[-A\langle\xi\rangle^{1/\kappa}/2] \\
&\le C(u)A(u)^{k+2}(k+2)!^{\kappa} \\
&\quad \times \Big[\frac{C(\tilde a)}{A(u)^2(k+2)^{\kappa}(k+1)^{\kappa}B^2}\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}^{1-\kappa}\Big(\frac{A(\tilde a)}{A(u)}\Big)^{k-l} \\
&\qquad \times \sum_{\mu=2}^{l+2}\frac{\langle\xi\rangle^{\mu}}{\mu!^{\kappa}}B^{\mu}\mu^{\kappa}(\mu-1)^{\kappa} \\
&\quad + \frac{C(b_0)}{A(u)(k+2)^{\kappa}(k+1)^{\kappa}}\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}^{1-\kappa}\Big(\frac{A(b_0)}{A(u)}\Big)^{k-l}(l+1)^{\kappa} \\
&\qquad \times \sum_{\mu=1}^{l+2}\frac{\langle\xi\rangle^{\mu}}{\mu!^{\kappa}}B^{\mu}\mu^{\kappa}\Big] \exp[-A\langle\xi\rangle^{1/\kappa}/2] \\
&\le C(u)A(u)^{k+2}(k+2)!^{\kappa}\sum_{\mu=0}^{k+2}\frac{\langle\xi\rangle^{\mu}}{\mu!^{\kappa}}B^{\mu} \\
&\qquad \times \Big[\frac{c_{\kappa}C(\tilde a)}{A(u)^2B^2}+\frac{c_{\kappa}C(b_0)}{A(u)B}\Big] \exp[-A\langle\xi\rangle^{1/\kappa}/2] \\
&\le C(u)A(u)^{k+2}(k+2)!^{\kappa}\sum_{\mu=0}^{k+2}\frac{\langle\xi\rangle^{\mu}}{\mu!^{\kappa}}B^{\mu}\exp[-A\langle\xi\rangle^{1/\kappa}/2] \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \text{for } (t,\xi)\in[0,T]\times\mathbf{R}^n
\end{aligned}
$$

よって (9) が示された.

Lemma $u(t,x)\in C^\infty([0,T];\mathcal{D}^*(\mathbf{R}^n))$ が (9) を満たすとする．そのとき

$$|\langle\xi\rangle^{n+1}D_t^k(\xi^\alpha\hat{u}(t,\xi))|\le C(u)A(u)^k k!^\kappa\langle\xi\rangle^{n+1+|\alpha|}\exp[-A\langle\xi\rangle^{1/\kappa}/4]$$
$$\text{for } (t,\xi)\in[0,T]\times\mathbf{R}^n,\ k\in\mathbf{Z}_+ \text{ and } \alpha\in(\mathbf{Z}_+)^n$$

さらに

$$|D_t^kD_x^\alpha u(t,x)|\le C(u)'A(u)^k\Big(\frac{8\kappa}{A}\Big)^{\kappa|\alpha|}k!^\kappa|\alpha|!^\kappa$$
$$\text{for } (t,x)\in[0,T]\times\mathbf{R}^n,\ k\in\mathbf{Z}_+ \text{ and } \alpha\in(\mathbf{Z}_+)^n$$

注）$*=(\kappa)$ のとき $A\to\infty$ ととれ, $B=(A/(4\kappa))^\kappa$ ととって (以下の証明参), $A(u)$, $(A/(4\kappa))^{-\kappa}\to 0$ ととれる．すなわち $u(t,x)\in\mathcal{E}^{(\kappa)}([0,T]\times\mathbf{R}^n)$.

<u>証明</u> $a_l\ge 0$, $\kappa\ge 1$ のとき

$$\Big(\sum_{l=1}^k a_l^\kappa\Big)^{1/\kappa}\le\sum_{l=1}^k a_l\quad(k\in\mathbf{Z}_+)$$

は明らか．故に

$$\Big(\sum_{l=0}^k\frac{\langle\xi\rangle^l}{l!^\kappa}B^l\Big)^{1/\kappa}\le\sum_{l=0}^k\frac{\langle\xi\rangle^{l/\kappa}}{l!}B^{l/\kappa}\le\exp[B^{1/\kappa}\langle\xi\rangle^{1/\kappa}],$$
$$\sum_{l=0}^k\frac{\langle\xi\rangle^l}{l!^\kappa}B^l\le\exp[\kappa B^{1/\kappa}\langle\xi\rangle^{1/\kappa}]$$

よって (9) で $B=(A/(4\kappa))^\kappa$ ととって

$$|\langle\xi\rangle^{n+1}D_t^k(\xi^\alpha\hat{u}(t,\xi))|\le C(u)A(u)^k k!^\kappa\langle\xi\rangle^{n+1+|\alpha|}\exp[-A\langle\xi\rangle^{1/\kappa}/4]$$

を得る．$c>0$, $k,l\in\mathbf{Z}_+$ に対して

$$s^{k+l}\le c^{-(k+l)\kappa}(k+l)!^\kappa\exp[\kappa cs^{1/\kappa}]\le(c/2)^{-(k+l)\kappa}k!^\kappa l!^\kappa\exp[\kappa cs^{1/\kappa}]$$

に注意して,

$$|\langle\xi\rangle^{n+1}D_t^k(\xi^\alpha\hat{u}(t,\xi))|\le\widehat{C}(u)A(u)^k\Big(\frac{8\kappa}{A}\Big)^{\kappa|\alpha|}k!^\kappa|\alpha|!^\kappa$$

これより Lemma が従う． □

3. 例

<u>例 1</u> $n=1$, $a(t,\xi)=t^k\xi^2$, $b_1(t,\xi)=t^l\xi$ (但し $k,l\in\mathbf{Z}_+$) のとき.

$$\mathcal{R}(\xi)=\{0\}\quad\text{for } \xi\in S^0(=\{1,-1\})$$

ととる. そのとき条件 (G) は $0\le\nu<1/\kappa$ として

$$t^{l+1/(1-\nu)}\lesssim t^{k(1-2\nu)/(2-2\nu)}\quad(t\in[0,T])$$

となり

$$\begin{aligned}&(\mathrm{G})\quad\Longleftrightarrow\quad l+\frac{1}{1-\nu}\ge\frac{k(1-2\nu)}{2-2\nu}\quad\Longleftrightarrow\\&2l(1-\nu)+2\ge k(1-2\nu)\quad\Longleftrightarrow\quad(2k-2l)\nu\ge k-2l-2\end{aligned}$$

したがって, $(k+2)/0=\infty$ と考えて, 条件 (G) は $\exists\nu$ s.t.

$$\kappa<\frac{1}{\nu}\le 1+\frac{k+2}{(k-2l-2)_+}$$

と同値. 実際 $k-2l-2>0$ ならば明らか. $k-2l-2\le 0$ のとき

$$\begin{aligned}&(2k-2l)\nu\ge k-2l-2\quad\Longleftrightarrow\\&k+2\ge(k-2l-2)(1/\nu-1):\ \text{常に正しい}\end{aligned}$$

故に

$$\kappa<1+\frac{k+2}{(k-2l-2)_+}\tag{I}$$

ならば, (CP) は $\mathcal{E}^*$ で適切.

注）Ivrii が (I) が $\mathcal{E}^{\{\kappa\}}$ well-posed であるための必要十分条件であることを示した (k が偶数の場合?).

<u>例 2</u> $n=2$, $k_j,l_j\in\mathbf{Z}_+$ $(j=1,2)$, $k_2>0$,

$$a(t,\xi)=t^{k_1}(t^{k_2}\xi_1-\xi_2)^2,\quad b_1(t,\xi)=t^{l_1}\xi_1+t^{l_2}\xi_2$$

のとき.

$$b_1(t,\xi)=(t^{l_1}\xi_1+t^{l_2+k_2})\xi_1-t^{l_2}(t^{k_2}\xi_1-\xi_2)$$

である．$\bar{l}=\min\{l_1, l_2+k_2\}$ とおく．

$$\mathcal{R}(\xi)=\begin{cases}\{0, |\xi_2/\xi_1|^{1/k_2}\omega_1, \cdots, |\xi_2/\xi_1|^{1/k_2}\omega_{k_2}\} & \text{for } \xi\in S^1 \text{ with } \xi_1\neq 0,\\ \{0\} & \text{for } \xi\in S^1 \text{ with } \xi_1=0\end{cases}$$

ととる．ここで

$$\omega_l=\exp[i\{\arg(\xi_2/\xi_1)+2(l-1)\pi\}/k_2] \quad (l=1,2,\cdots,k_2).$$

Prop. を考慮して，$0\leq\nu<1/\kappa$ かつ $\nu\leq 1/2$ としてよい．

$$\min_{s\in\mathcal{R}(\xi)}|t-s|\lesssim|t^{k_2}-\xi_2/\xi_1|^{1/k_2} \quad \text{if } \xi\in S^1 \text{ and } \xi_1\neq 0$$

に注意して

$$\text{(G)} \quad \Longleftrightarrow$$

$$\begin{cases}(1-2\nu)/(1-\nu)\leq 1,\\ t^{l_2+1/(1-\nu)}\lesssim t^{k_1(1-2\nu)/(2-2\nu)},\\ \exists\lambda\in[0,1]\ s.t.\\ \quad t^{\bar{l}+(1-\lambda)/(1-\nu)}\lesssim t^{k_1(1-2\nu)/(2-2\nu)}|t^{k_2}-\xi_2/\xi_1|^{(1-2\nu)/(1-\nu)-\lambda/(k_2(1-\nu))}\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{if } \xi_1\neq 0,\\ t^{\bar{l}+1/(1-\nu)}\lesssim t^{k_1(1-2\nu)/(2-2\nu)} \quad (\xi_1\sim 0 \text{ の所からでくる条件})\end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\begin{cases}(2k_1-2l_2)\nu\geq k_1-2l_2-2\\ 0\leq\lambda=k_2(1-2\nu)\leq 1\\ (2k_1+4k_2-2\bar{l})\nu\geq k_1+2k_2-2\bar{l}-2\\ (2k_1-2\bar{l})\nu\geq k_1-2\bar{l}-2\end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\begin{cases}k_1+2\geq(k_1-2l_2-2)(1/\nu-1)\\ k_2+1\geq(k_2-1)(1/\nu-1)\\ k_1+2k_2+2\geq(k_1+2k_2-2\bar{l}-2)(1/\nu-1)\\ k_1+2\geq(k_1-2\bar{l}-2)(1/\nu-1)\end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$1+\min\Big\{\frac{k_1+2}{(k_1-2l_2-2)_+},\frac{k_2+1}{(k_2-1)_+},\frac{k_1+2k_2+2}{(k_1+2k_2-2\bar{l}-2)_+}\Big\}\geq\frac{1}{\nu}>\kappa$$

ここで

$$\frac{k_1+2k_2+2}{(k_1+2k_2-2\bar{l}-2)_+}\leq\frac{k_1+2}{(k_1-2\bar{l}-2)_+}$$

であることを用いた.

$$\kappa<1+\min\Big\{\frac{k_1+2}{(k_1-2l_2-2)_+},\frac{k_2+1}{(k_2-1)_+},\frac{k_1+2k_2+2}{(k_1+2k_2-2\bar{l}-2)_+}\Big\}$$

ならば, (CP) は $\mathcal{E}^*$ で適切.